ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ BÍCH PHƯỢNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BÀI TOÁN ĐẾM TRONG TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ BÍCH PHƯỢNG

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BÀI TOÁN ĐẾM TRONG TỔ HỢP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Hoàng Lê Trường

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

MỞ ĐẦU

Toán học tổ hợp là một trong những nội dung quan trọng trong giáo dục phổ thông. Học sinh thường gặp khó khăn khi giải quyết các bài toán này. Vì vậy, tìm hiểu sâu thêm về toán tổ hợp là rất cần thiết. Trong toán học tổ hợp, bài toán đếm là một trong những bài toán cơ bản. Phép đếm là một công cụ đắc lực trong toán học và là một điều rất tự nhiên trong cuộc sống con người. Nhiều kết quả đã biết trong toán học tổ hợp đều có thể được giải thích chỉ bằng phép đếm.

Luận văn được viết dựa chủ yếu trên tài liệu chính để tham khảo là [4]. Mục đích chính của luận văn là trình bày, khẳng định lại các kết quả đã có trong toán học tổ hợp bằng lí luận đếm từ cơ bản đến nâng cao, phục vụ cho công việc giảng dạy môn toán tổ hợp ở bậc THPT.

Cấu trúc luận văn gồm 2 chượng.

Chương 1. Bài toán đếm. Chương 1 trình bày lại các kiến thức cơ bản nhất của bài toán đếm trong tổ hợp, cùng với một số ứng dụng điển hình của chúng thông qua lí luận đếm. Đó là định lí khai triển nhị thức NewTon, lựa chọn với sự lặp lại, phân hoạch, đếm lặp, nguyên tắc trung bình, nguyên tắc bao hàm loại trừ.

Chương 2. Đếm nâng cao. Trên cơ sở vận dụng các kiến thức cơ bản đã được trình bày trong chương 1, chương 2 trình bày một số kết quả nâng cao đã nghiên cứu được từ bài toán đếm. Mục đích chính của chương 2 tập trung vào khai thác một số kết quả quan trọng trong lí thuyết đồ thị. Đó là chặn cỡ của các tập giao, đồ thị không có chu trình độ dài 4, vấn đề của Zarankiewicz, tính trù mật của ma trận nhị phân.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tác giả nhận được sự hướng dẫn và giúp

đỡ tận tình của tiến sĩ Hoàng Lê Trường. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới thầy.

Tác giả cũng bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới quí thầy cô giảng dạy lớp cao học toán khóa 10, trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã giảng dạy và truyền thụ đến cho tác giả nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tới Ban giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Lí Nhân Tông, gia đình và bạn bè đã luôn động viên giúp đỡ và tạo điều kiện cho tác giả về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, ngày... tháng... năm 2018

Tác giả

Nguyễn Thị Bích Phượng

Chương 1. Bài toán đếm

1.1 Định lí nhị thức

Cho một tập có n phần tử, bài toán tìm số các tập con của nó có đúng k phần tử là bài toán cổ nhưng quan trọng với học sinh THPT. Con số này (số các tập con gồm k phần tử của tập hợp có n phần tử) thường được kí hiệu là C_n^k và được gọi là hệ số nhị thức. Nói cách khác, C_n^k là số khả năng chọn ra k phần tử phân biệt từ một bộ n phần tử phân biệt. Đẳng thức sau đây được chứng minh bởi Sir Isaac Newton năm 1666, và được biết đến như định lí khai triển nhị thức Newton.

Định lí khai triển nhị thức Newton. Cho n là một số nguyên dương. Khi đó với mọi x, y, ta có

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Chứng minh. Ta có:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n\text{ số hạng}},$$

Để chứng minh định lí ta cần chứng minh với mọi $k = 0, 1, ..., n$ ta thu được C_n^k số hạng $x^k y^{n-k}$.

Thật vậy, ta xét bài toán tìm số các số hạng có chứa x^k trong khai triển. Một cách tự nhiên chúng ta sẽ thực hiện phép đếm như sau. Đầu tiên, ta chọn k thừa số $(x+y)$ bất kì trong n thừa số (các thừa số giống nhau đều có dạng là $(x+y)$) ta có C_n^k cách chọn. Tiếp theo, ứng với mỗi cách chọn đó, muốn có số hạng x^k ta lấy số x trong từng thừa số được chọn nhân với nhau thì ta sẽ được x^k, số x^k

này lại được tiếp tục nhân với nhóm còn lại, gồm $(n-k)$ thừa số $(x+y)$ hay nói cách khác x^k còn được nhân thêm với $(x+y)^{n-k}$.
Vì số mũ của x chỉ được phép bằng k nên tiếp theo ta cần chọn xem trong khai triển

$$(x+y)^{n-k} = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{(n-k)\text{ số hạng}},$$

Những số hạng nào nhân với x^k mà sẽ không làm thay đổi số mũ của x. Ta thấy ngay rằng, đó phải là các số hạng không chứa x, chỉ chứa y. Muốn tìm các số hạng chỉ chứa y trong khai triển trên, thì chỉ có một cách duy nhất là ta lấy số y trong $(n-k)$ thừa số ấy nhân với nhau, và kết quả ta được số hạng y^{n-k}.
Do đó, $x^k y^{n-k}$ là số hạng mà chứa x^k ứng với mỗi một cách chọn bộ k thừa số $(x+y)$.

Vì vậy, với C_n^k cách chọn bộ k thừa số $(x+y)$ như trên, ta thu được C_n^k số hạng có dạng $x^k y^{n-k}$. □

Chú ý rằng định lí này chỉ là sự tổng quát hóa của hằng đẳng thức mà chúng ta đã biết:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Mặc dù đơn giản như vậy, nhưng định lí khai triển nhị thức có rất nhiều ứng dụng.

Ví dụ 1.1. (Tính chẵn lẻ). Đây là một ví dụ điển hình, hãy chỉ ra tính chất sau đây của các số nguyên: *Nếu n,k là các số tự nhiên thì n^k là số lẻ khi và chỉ khi n là số lẻ.*

Lời giải. (⇒) Nếu $n = 2m$, n là số chẵn thì $n^k = 2^k m^k$ cũng phải là số chẵn.
(⇐) Để chứng minh chiều ngược lại ta giả sử rằng n là số lẻ tức là n có dạng $n = 2m+1$ (m$\in \mathbb{N}$).
Áp dụng định lí khai triển nhị thức ta có:

$$n^k = (2m+1)^k = 1 + (2m)^1 C_k^1 + (2m)^2 C_k^2 + \cdots + (2m)^k C_k^k.$$

Từ khai triển trên ta thấy n^k phải là số lẻ. □

n giai thừa kí hiệu $n!$ là tích của n số tự nhiên liên tiếp đầu tiên,

$$n! = n(n-1)\cdots 2.1$$

Điều này có thể mở rộng cho tất cả các số nguyên không âm với quy ước $0! = 1$. Chỉnh hợp chập k của của n là tích của k thừa số đầu tiên.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Chú ý rằng $C_n^0 = 1$ (tập rỗng) và $C_n^n = 1$ (tập chứa toàn bộ n phần tử). Nói chung, hệ số nhị thức có thể được viết dưới dạng thương của các giai thừa.

Mệnh đề 1.2. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Chứng minh. Ta thấy A_n^k là số các dãy có thứ tự $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ gồm k phần tử khác nhau của một tập hợp cố định có n phần tử. Có n cách chọn phần tử đầu tiên x_1. Có $(n-1)$ cách chọn phần tử tiếp theo $x_2, \cdots$

Bằng một cách khác ta có thể chứng minh được. Ta chọn một tập hợp k phần tử khác nhau từ tập hợp có n phần tử, ta có C_n^k cách chọn. Ứng với mỗi cách chọn trên ta có $A_k^k = k!$ cách sắp xếp thứ tự các phần tử của dãy $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$. Từ đó ta kết luận: $A_n^k = C_n^k k!$. □

Có nhiều đẳng thức hữu ích về mối quan hệ giữa các hệ số nhị thức. Trong nhiều tình huống, sử dụng những điều rất tự nhiên thuộc về tổ hợp để chứng minh các đẳng thức đại số giống như mệnh đề trên, chúng ta có thể thu được kết quả mong muốn một cách dễ dàng. Ví dụ khi chúng ta thấy rằng mỗi tập con được xác định một cách duy nhất theo phần bù của nó thì ngay lập tức ta thu được các đẳng thức.

$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

Với đẳng thức này, và với n cố định, giá trị của hệ số nhị thức C_n^k tăng đến giữa rồi lại giảm. Dùng định lí khai triển nhị thức thì tổng của tất cả $(n+1)$ hệ số bằng 2^n, 2^n chính là số tất cả các tập con của tập có n phần tử:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^k (1)^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Bằng một cách tương tự dùng tổ hợp ta có thể thiết lập được các đồng nhất thức hữu ích.

Mệnh đề 1.3. *(Tam giác Pascal). Với mọi số nguyên n$\geq k \geq 1$, ta có*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Chứng minh. Số hạng đầu C_{n-1}^{k-1} là số các tập hợp có k phần tử trong đó luôn có một phần tử cố định. Số hạng thứ hai C_{n-1}^k là số các tập hợp có k phần tử khác phần tử cố định trên. Do đó, tổng của chúng chính là C_n^k. □

Thay đổi n,k, tính một cách chính xác hệ số nhị thức C_n^k là rất phức tạp. Tuy nhiên, trong những ứng dụng, chúng ta thường chỉ quan tâm đến tỉ lệ tăng của chúng sao cho đủ để ước lượng. Ví dụ như ước lượng có thể thu được bằng cách sử dụng khai triển Taylor của hàm số mũ và hàm số lôgarit.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

và

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots, \qquad \forall -1 < t \leq 1. \tag{3}$$

Điều này đặc biệt kéo theo một số ước lượng hữu ích khác

$$1 + t < e^t, \qquad \forall t \neq 0, \tag{4}$$

$$1 - t > e^{-t-\frac{t^2}{2}}, \qquad \forall 0 < t < 1. \tag{5}$$

Mệnh đề 1.4. $(6): (\frac{n}{k})^k \leq C_n^k$ *và* $\sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i \leq (\frac{en}{k})^k$.

Chứng minh. Bị chặn dưới:

$$(\frac{n}{k})^k = \frac{n}{k}\frac{n}{k}\cdots\frac{n}{k} \leq \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{1} = C_n^k.$$

Bị chặn trên: Cho $0 < t \leq 1$, từ định lí nhị thức ta có bất đẳng thức sau:

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i \leq \sum_{i=0}^{k} C_n^i \frac{t^i}{t^k} = \frac{(1+t)^n}{t^k}.$$

Tiếp theo ta thay $t = \dfrac{k}{n}$.

$\square$

Những ước lượng chặt chẽ hơn sau đây có thể thu được từ công thức nổi tiếng Stirling cho giai thừa:

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} e^{\alpha_n}, \tag{7}$$

ở đây $1/(12n+1) < \alpha_n < 1/12n$. Ước lượng này là cơ bản và có nhiều ứng dụng ví dụ như để tính xấp xỉ cho chỉnh hợp chập k của n phần tử

$$A_n^k = n^k e^{\frac{-k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2} + o(1)} \text{ với } k = o(n^{3/4}), \tag{8}$$

và vì thế, áp dụng đối với hệ số tổ hợp ta có:

$$C_n^k = \frac{n^k e^{\frac{-k^2}{2n} - \frac{k^3}{6n^2}}}{k!}(1 + o(1)). \tag{9}$$

1.2 Lựa chọn với sự lặp lại

Trong phần trước chúng ta xét số cách chọn r phần tử phân biệt từ một tập hợp có n phần tử. Một điều tự nhiên đặt ra là điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta chọn những phần tử giống nhau lặp lại. Nói cách khác, chúng ta có thể trả lời câu hỏi có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm của phương trình: $x_1 + \cdots + x_n = r$ ($x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \cdots, n$) (xem x_i như là số lần mà phần tử thứ i được chọn). Công thức sau đây của vấn đề này được đưa ra bởi *Lovász*, *Pelikań* và *Vesztergombi. Lovász* đã giải bài toán chia kẹo bằng phương pháp lựa chọn với sự lặp lại.

Giả sử chúng ta có r cái kẹo cùng loại (giống nhau) chúng ta muốn chia cho n đứa trẻ. Chúng ta có bao nhiêu cách chia ?. Ta kí hiệu x_i là số kẹo mà chúng ta phát cho đứa trẻ thứ i. Câu hỏi này tương đương với phát biểu ở trên.

Câu trả lời phụ thuộc vào chúng ta có bao nhiêu cái kẹo và chúng ta phải công bằng như thế nào. Nếu chúng ta công bằng nhưng chúng ta chỉ có $r < n$ cái kẹo thì một điều tự nhiên là không có sự lặp lại và ta chỉ phát được cho mỗi đứa trẻ không nhiều hơn một cái kẹo (đứa trẻ x_i sẽ nhận được 0 hoặc 1 cái kẹo). Trong trường hợp này câu trả lời thật dễ dàng. Chúng ta chỉ cần chọn r đứa